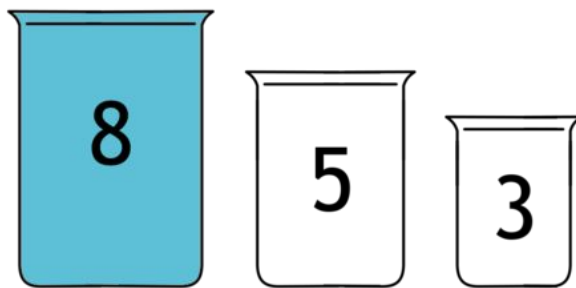


Problemas de tres jarras



Taller de Talento Matemático de Navarra
Nafarroako Matematika-Talentu Tailerra

Tudela, 16 de mayo de 2025

Introducción

Se cuenta que el gran matemático francés del siglo XIX, [Siméon Denis Poisson](#), comenzó a interesarse por esta disciplina al encontrarse, de niño, con el siguiente problema:

«Dos amigos tienen una jarra con ocho litros de agua que quieren repartirse a partes iguales. Para ello disponen también de otras dos jarras vacías, la primera con cinco litros, y la otra con tres litros de capacidad. ¿Cómo pueden medir exactamente cuatro litros de agua?»

¡Hoy vamos a enfrentarnos a este problema!

Dudeney (Diversiones en matemáticas 1917, [5] p.109) proporciona la siguiente historia de los “problemas de vertido” o “Los rompecabezas de medición de Tartaglia”

«Al parecer, el primer rompecabezas impreso que implicaba medir una cantidad dada de líquido vertiéndolo de un recipiente a otros de capacidad conocida fue el propuesto por Niccola Fontana, más conocido como “Tartaglia” (el tartamudo, 1500-1559). Consiste en dividir 24 onzas de valioso bálsamo en tres partes iguales; las únicas medidas disponibles eran recipientes de 5, 11 y 13 onzas respectivamente. Existen muchas soluciones diferentes para este rompecabezas en seis manipulaciones, o vertidos de un recipiente a otro. Es opinión general que los rompecabezas de esta clase solo pueden resolverse mediante ensayo, pero creo que se pueden construir fórmulas para la solución general de ciertos casos relacionados. Es un campo de investigación prácticamente inexplorado.»

En el cine

Este problema también tuvo su aparición en el cine



Tomaos unos minutos para pensar en cómo resolverlo y anotad vuestras [ideas...](#)

Observaciones

Algunas observaciones que pueden haber surgido tras reflexionar...

- Puede que varias personas hayan pensado en **representar** las cantidades de las jarras como *ternas* de números (x, y, z) , donde
 - x representa los litros que hay en la **primera jarra**,
 - y representa los litros que hay en la **segunda jarra**,
 - z representa los litros que hay en la **tercera jarra**.

Por ejemplo, una posible secuencia de trasvases podría escribirse así:

$$(8, 0, 0) \rightarrow (3, 5, 0) \rightarrow (3, 2, 3) \rightarrow (6, 2, 0) \rightarrow \dots$$

Para abreviar, podemos escribir 800 o 350 en lugar de $(8, 0, 0)$ y $(3, 5, 0)$.

Observaciones

- Algunas personas pueden haber dado, incluso, con alguna solución.
 - ¿Qué habéis pensado para resolverlo?
Probar posibilidades, ensayo y error...
 - ¿Pensáis que puede haber más de una solución?
¿Qué pasaría si en vez de con $800 \rightarrow 350$ empezamos con $800 \rightarrow 503$ (o viceversa)?
 - ¿Qué habría ocurrido si el problema que nos han puesto no tiene solución?
Podríamos haber estado probando toda la tarde sin llegar a nada...

¿Podemos pensar en alguna estrategia que nos permita resolver fácilmente cualquier problema de este tipo?

¿Cómo representamos geométricamente el problema?

Vamos a pensar... Ya que tenemos **tres** jarras, sería natural usar algún objeto geométrico que conozcamos que esté formado por tres «algo». ¿Alguna idea?

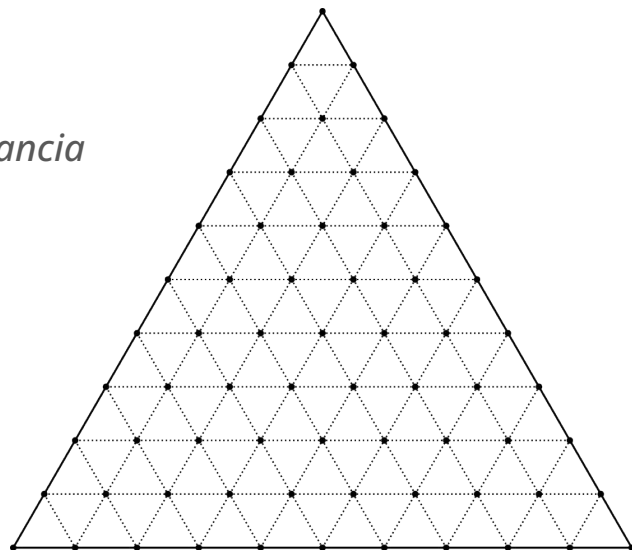
Solución. ¡Un triángulo, claro! Está formado por tres vértices y tres lados...

¿Nos vale cualquier triángulo?

Solución. En nuestro problema, cada jarra tiene la misma importancia que las demás, luego parece lógico que utilicemos un **triángulo equilátero** (con los tres lados iguales).

¿Qué tamaño tendría que tener nuestro triángulo?

Solución. La jarra con más capacidad tiene ocho litros, luego puede que necesitemos un triángulo equilátero de... ¿lado 8? ¿altura 8? No está muy claro qué nos conviene...

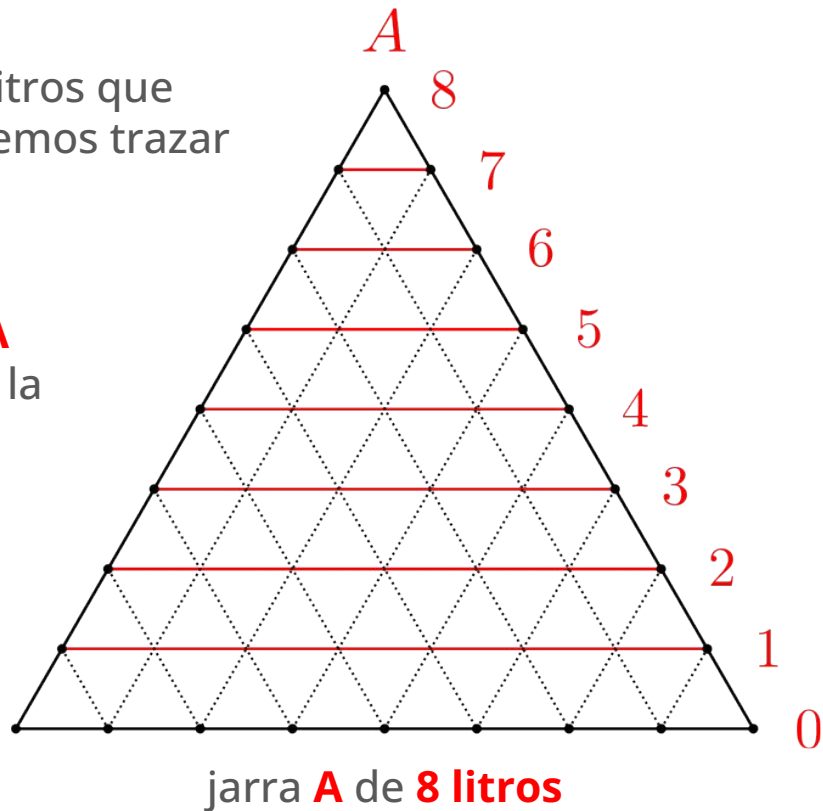


¿Cómo representamos geométricamente el problema?

Vamos a fijarnos en la primera jarra, de 8 litros.
Llamémosla «jarra **A**». Podemos pensar en los litros que contiene como «niveles» horizontales, que podemos trazar en el triángulo.

Los puntos situados en la *base* del triángulo representan las situaciones en las que la jarra **A** contiene **0 litros**. El vértice superior representa la situación 800, en la que la jarra **A** tiene **8 litros**. El resto de vértices representan estados intermedios: **1 litro**, **2 litros**, **3 litros**...

¿Podemos pensar algo similar para las otras dos jarras (llamémoslas **B** y **C**)?



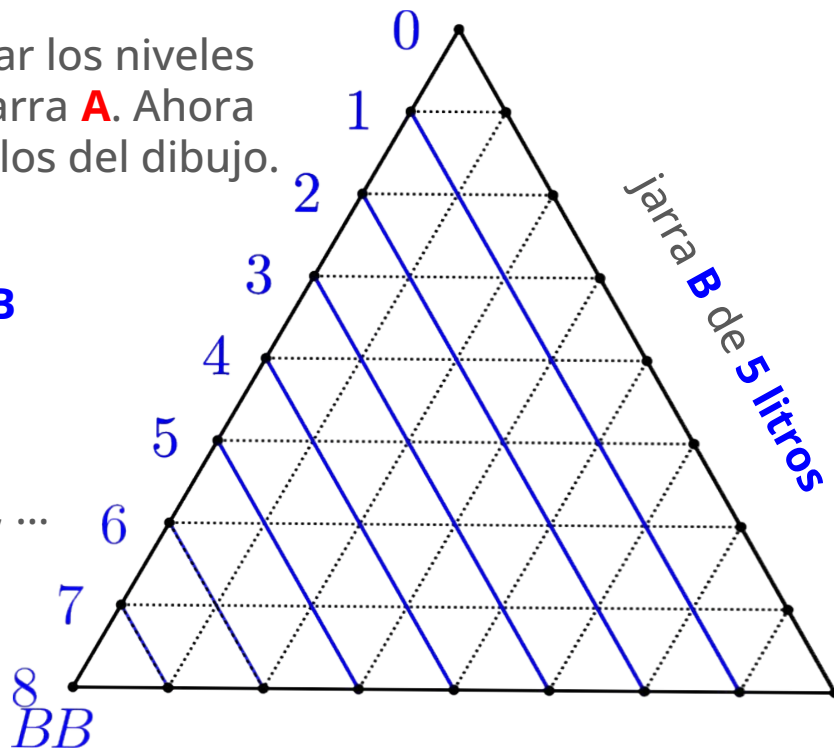
¿Cómo representamos geométricamente el problema?

Para la jarra **B**, de 5 litros, no podemos tomar los niveles horizontales, ya que están cogidos para la jarra **A**. Ahora tendremos que pensar en los niveles paralelos del dibujo.

Los puntos situados en el *lado opuesto* a **B** representan situaciones en las que la jarra **B** tiene **0 litros**. El punto 080 representaría la situación en la que la jarra **B** tiene **8 litros** (imposible). El resto de puntos representan estados intermedios: **1 litro**, **2 litros**, **3 litros**, ...

¡Pero la jarra **B sólo tiene 5 litros!**

Entonces sólo podremos dibujar hasta el **nivel 5**...



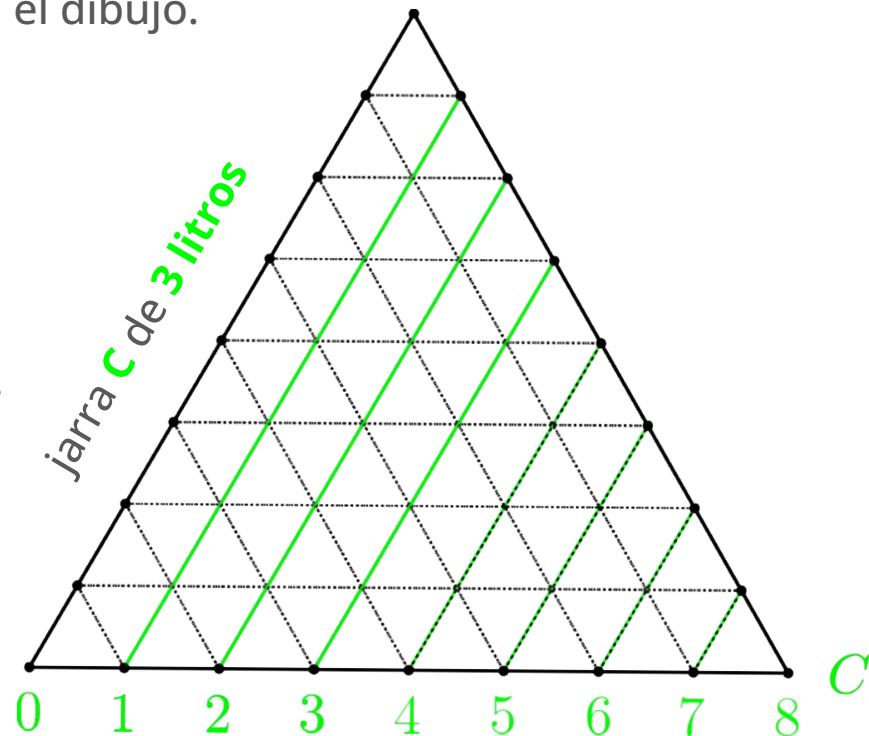
¿Cómo representamos geométricamente el problema?

Para la jarra **C**, de 3 litros, los niveles que podemos dibujar son los paralelos al lado opuesto a **C**, como en el dibujo.

Los puntos situados en el *lado opuesto* a **C** representan situaciones en las que la jarra **C** tiene **0 litros**. El punto 008 representaría la situación en la que la jarra **C** tiene **8 litros** (imposible). El resto de puntos representan estados intermedios: **1 litro**, **2 litros**, **3 litros**, ...

¡Pero la jarra **C sólo tiene 3 litros!**

Entonces sólo podremos dibujar hasta el **nivel 3**...



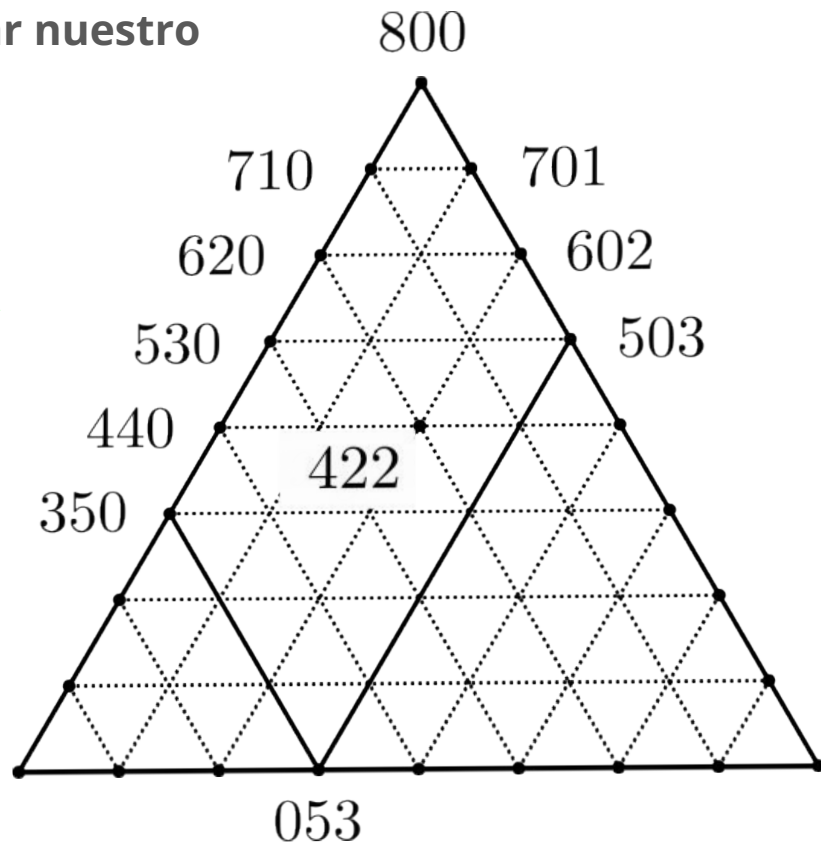
Región factible

¡Con todo lo anterior, podemos representar nuestro problema gráficamente!

Ahora podemos decir que un punto de coordenadas xyz en nuestro triángulo representa la situación en la que la jarra **A** tiene x litros, la jarra **B** tiene y litros y la jarra **C** tiene z litros.

Los puntos que tienen sentido en nuestro problema son los que están en el paralelogramo marcado en el dibujo, que podemos llamar *región factible*.

¿Cuáles serían las coordenadas de los puntos marcados en negro?



Región factible

- ¿Qué situación representa el vértice 800? ¿Y el punto 440?

Solución. El vértice 880 representa la situación inicial, la jarra de 8l llena y las otras dos vacías.

El vértice 440 representa la situación objetivo, 4l en cada jarra.

- ¿Cuánto suman siempre las coordenadas X Y Z? ¿Tiene esto sentido?

Solución. Suma 8, porque son los litros totales.

- ¿Podrías inventar un problema en el que la región factible sea un hexágono, un pentágono o un trappecio? ¿Cuál sería el problema en el que la región factible es todo el triángulo?

Solución. Por ejemplo, un pentágono: la cantidad de 8l a repartir entre jarras de 7l, 5l y 3l.

Si las tres jarras fuesen de 8 litros.

Y los trasvases... ¿Cómo los representamos?

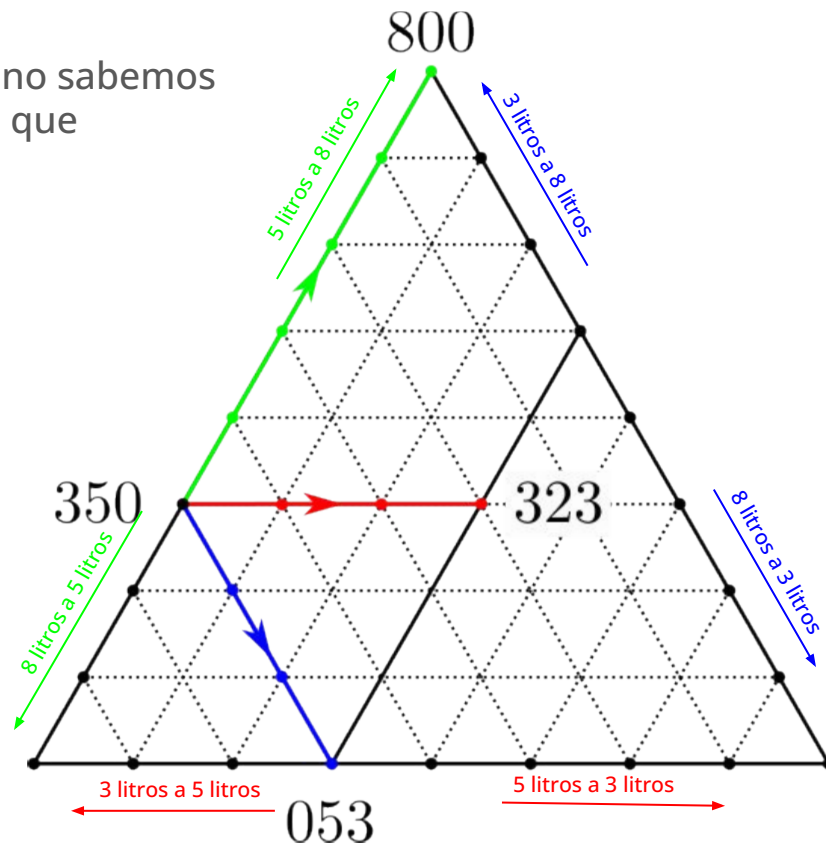
Todo esto está muy bien, pero no sirve de mucho si no sabemos dibujar qué sucede cuando trasvasamos la cantidad que contiene la jarra **A** a la jarra **B**, o a la **C**...

Imaginad que estamos en el punto 350.

¿Qué opciones tendríamos?

- **Opción 1.** Trasvasar 5 litros de la jarra **B** a la jarra **A**. Llegamos al punto **800** (inicio).
- **Opción 2.** Trasvasar 3 litros de la jarra **B** a la jarra **C**. Llegamos al punto **323**.
- **Opción 3.** Trasvasar 3 litros de la jarra **A** a la jarra **C**. Llegamos al punto **053**.

¿Qué podemos concluir de esto?



Conclusiones

- Al trasvasar agua de **A** a **B**, ¿qué sucede con el agua que hay en **C**?

Solución. La cantidad de agua que hay en **C** se mantiene **constante**.

- En consecuencia, ¿cuál es la representación gráfica de un trasvase de **A** a **B**?

Solución. Se trata de un segmento paralelo al lado opuesto a **C**.

- ¿De dónde a dónde va ese segmento?

Solución. Tiene que unir dos puntos del borde de la región factible.

- ¿Puede el segmento detenerse en el interior de la región factible?

Solución. No, ya que no tenemos manera de calcular cantidades intermedias con las jarras.

- Esto que hemos dicho para trasvasar agua de **A** a **B**, ¿sirve en los otros dos casos?

Solución. Claro, es exactamente igual para trasvases entre **A** y **C** o entre **B** y **C**.

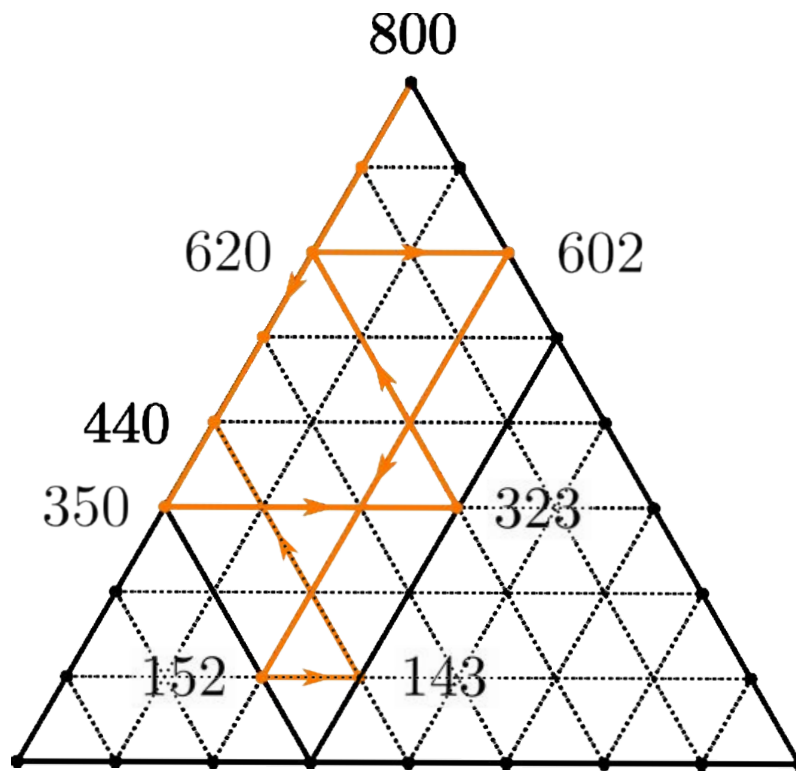
Juntamos todos los ingredientes...

Vamos a poner en común lo que hemos descubierto

- Comenzamos nuestro dibujo en el punto **800**, ya que inicialmente tenemos **8 litros** en la jarra **A**, y ninguno en las jarras **B** y **C**.
- Para hacer un trasvase tenemos que dibujar segmentos paralelos a los lados del triángulo equilátero inicial, de forma que siempre unamos puntos del borde de nuestra región factible. **Cuidado... ¡No podemos detenernos en el interior!**
- Así, vamos trazando un camino como si fuéramos «rebotando» por las paredes de la región factible siguiendo trayectorias rectas paralelas a los lados.
- Habremos acabado si conseguimos que nuestro camino llegue en algún momento al punto **440**, que es cuando tendremos el agua **repartida a partes iguales**.

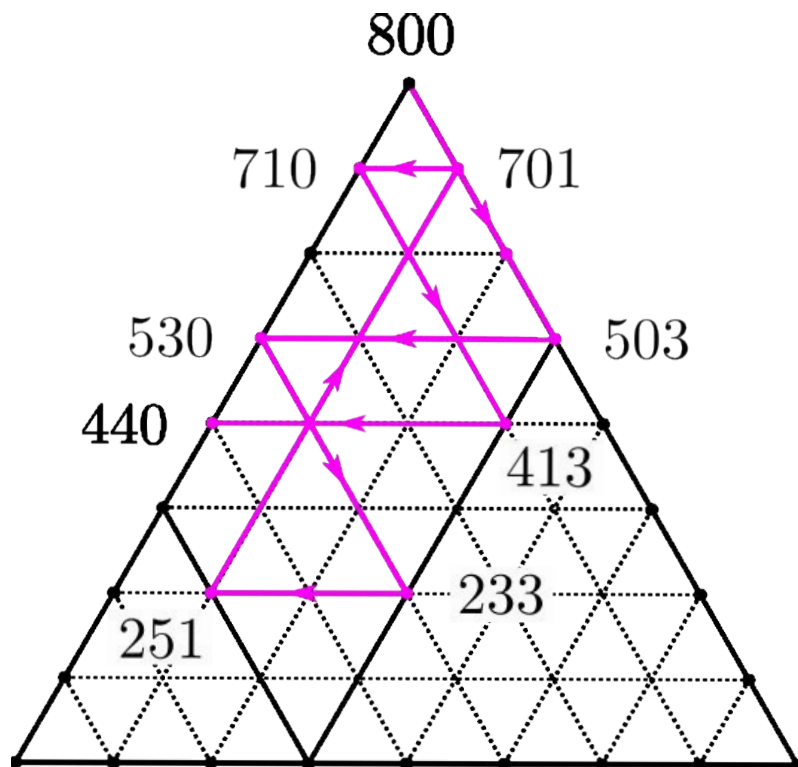
¡Manos a la obra!

Primera solución



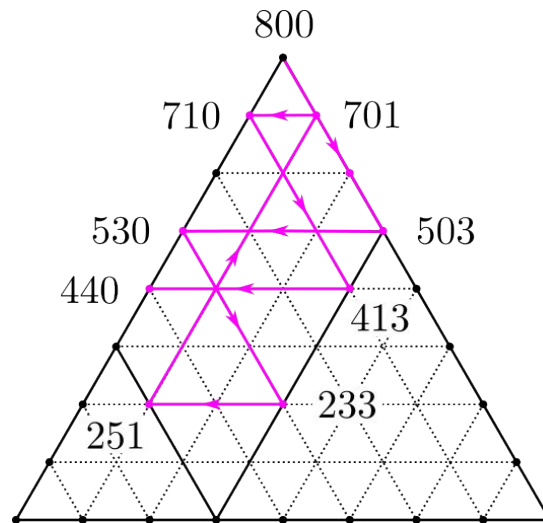
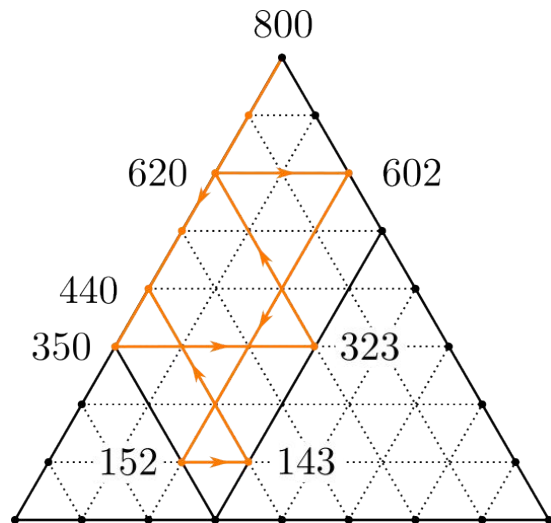
¡Manos a la obra!

Segunda solución



Y la solución es...

¡Resulta que hay dos soluciones!



[Veámoslo en
geogebra](#)

- **La 1ª:** $800 \rightarrow 350 \rightarrow 323 \rightarrow 620 \rightarrow 602 \rightarrow 152 \rightarrow 143 \rightarrow 440$ (7 pasos).
- **La 2ª:** $800 \rightarrow 503 \rightarrow 530 \rightarrow 233 \rightarrow 251 \rightarrow 701 \rightarrow 710 \rightarrow 413 \rightarrow 440$ (8 pasos).

Y si tuviéramos otras medidas...

Supongamos que las jarras vacías son de 2 y 6 litros, y la jarra llena es de 8 litros.

¿Podríamos medir exactamente 4 litros de agua? ¿Qué cantidades pueden medirse en este caso?

¿Qué sucede si las jarras son de 4, 6 y 10 litros, respectivamente? ¿5, 6 y 11 litros?

- **Observa que en todas estas versiones de este problema, la cantidad de agua contenida en las dos jarras más pequeñas sumadas es la misma que la cantidad de agua contenida en la jarra más grande.**
- **Este método no sólo permite descubrir las soluciones posibles, sino darnos cuenta más fácilmente de los casos en los que no hay solución.**

Para finalizar

Os dejo otros problemas más pensar...

«Nos dan un recipiente de 12 litros lleno de aceite, y dos recipientes vacíos de capacidades 9 litros y 5 litros. ¿Cómo podemos dividir el aceite en dos partes iguales?»

«Tres hombres sustrajeron a un caballero una vasija que contenía 24 litros de un bálsamo. En su huida se encontraron a un cristalero, a quien compraron 3 vasijas. Tras ponerse a salvo quisieron dividir el botín, pero se encontraron con que sus recipientes sólo podían almacenar 13, 11 y 5 litros respectivamente. ¿Cómo pueden dividir su botín en partes iguales?»



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

`jserrander@educacion.navarra.es`

`adoming3@educacion.navarra.es`